Criterio di Leibniz

Se la serie a segno alterno, $\sum_1^{\infty}(-1)^n a_n$ è tale che la successione dei valori assoluti dei suoi termini sia decrescente e $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, allora la serie è convergente.

Ovvero:

$\sum_1^{\infty}(-1)^n a_n$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ e allora la serie $\sum_1^{\infty}(-1)^n a_n$è **convergente**

$a_n > a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Esempio 1

Stabilire il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n sen\left(\frac{1}{n}\right)$$

utilizzando il criterio di Leibniz.

La serie è a segni alterni; consideriamo il termine generale $a_n = sen\left(\frac{1}{n}\right)$, e calcoliamo $\lim_{n\to\infty} sen\left(\frac{1}{n}\right)$

$\lim_{n\to\infty} sen\left(\frac{1}{n}\right) = 0$,

Verifichiamo se la successione $\left\{sen\left(\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\geq 1}$ è decrescente.

La funzione $y = senx$ è crescente per $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e tenuto presente che:

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1 < \frac{\pi}{2} \qquad \forall n \geq 1$$

e poiché $n < n+1$ e quindi $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ si ha che la successione è decrescente.

Quindi, per i criterio di Leibniz la serie data è convergente.

Esempio 2

Stabilire il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\log n}$$

utilizzando il criterio di Leibniz.

La serie è a segni alterni; consideriamo il termine generale $a_n=\frac{1}{\log n}$, e calcoliamo $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}=0$,

Verifichiamo se la successione $\left\{\frac{1}{\log n}\right\}_{n\geq 2}$ è decrescente.

Essendo la funzione $y=\log x$ monotona crescente; $\forall n\geq 1$, $\log n<\log(n+1)$ e quindi $\forall n\geq 2$

$\frac{1}{\log(n+1)}<\frac{1}{\log(n)}$ si ha che la successione $\left\{\frac{1}{\log n}\right\}_{n\geq 2}$ è decrescente.

Quindi per i criterio di Leibniz la serie data è convergente.

Esempio 3

Stabilire il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^n}$$

La serie è a segni alterni; consideriamo il termine generale $a_n=\frac{1}{n^2}$, e calcoliamo $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$$

Verifichiamo se la successione $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ è decrescente. Essendo la funzione $y=n^2$ monotona crescente $\forall n>0$; $\forall n\geq 1$ $\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n^2}$

si ha che la successione considerata è decrescente; segue per il criterio di Leibeniz che la serie data è convergente.

Esempio 4

Stabilire il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\sqrt[n]{5}-1\right)$$

La serie è a segni alterni; consideriamo il termine generale $a_n=\left(\sqrt[n]{5}-1\right)$, e calcoliamo $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{5}-1\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{5}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\left(5^{\frac{1}{n}}-1\right)=0$$

Verifichiamo se la successione $\left\{\left(\sqrt[n]{5}-1\right)\right\}_{n\geq 1}$ è decrescente.

La funzione $f(x)=\left(5^{\frac{1}{x}}\right)$ è decrescente infatti $f^{'}(x)=\left(5^{\frac{1}{x}}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)\ln 5<0\ \forall x\in\mathbb{R}^{+}$; pertanto la successione considerata e decrescente; quindi per i criterio di Leibniz la serie data è convergente.